

Curs 5

Aplicații ale programării liniare în managementul operațiunilor

Modelarea și analiza datelor pentru decizii de management

Conf.dr.ing. Lăcrimioara GRAMA

Anul 2 master · Tehnologii, Sisteme și Aplicații pentru eActivități

Facultatea de Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca



Cursul precedent



Aplicații ale programării liniare în marketing și finanțe

- ✓ Selecția media
- ✓ Cercetarea pieței
- ✓ Selecția portofoliului
- ✓ Planificarea financiară

La finalul acestui curs, studenții vor putea să:

- explice rolul programării liniare în managementul operațiunilor
- formuleze modele LP pentru decizii de tip *make-or-buy*
- construiască modele de planificare a producției pe mai multe perioade
- interpreteze soluții LP pentru repartizarea forței de muncă
- formuleze probleme de mixare (*blending*) cu restricții de compoziție și disponibilitate
- interpreteze rezultatele și implicațiile manageriale ale soluțiilor obținute

Obiectivele cursului



Cuprins

Managementul operațiunilor

- Decizii de tip *make-or-buy*
- Planificarea producției
- Repartizarea forței de muncă
- Probleme de mixare

Rezumat

Managementul operațiunilor

Managementul operațiunilor

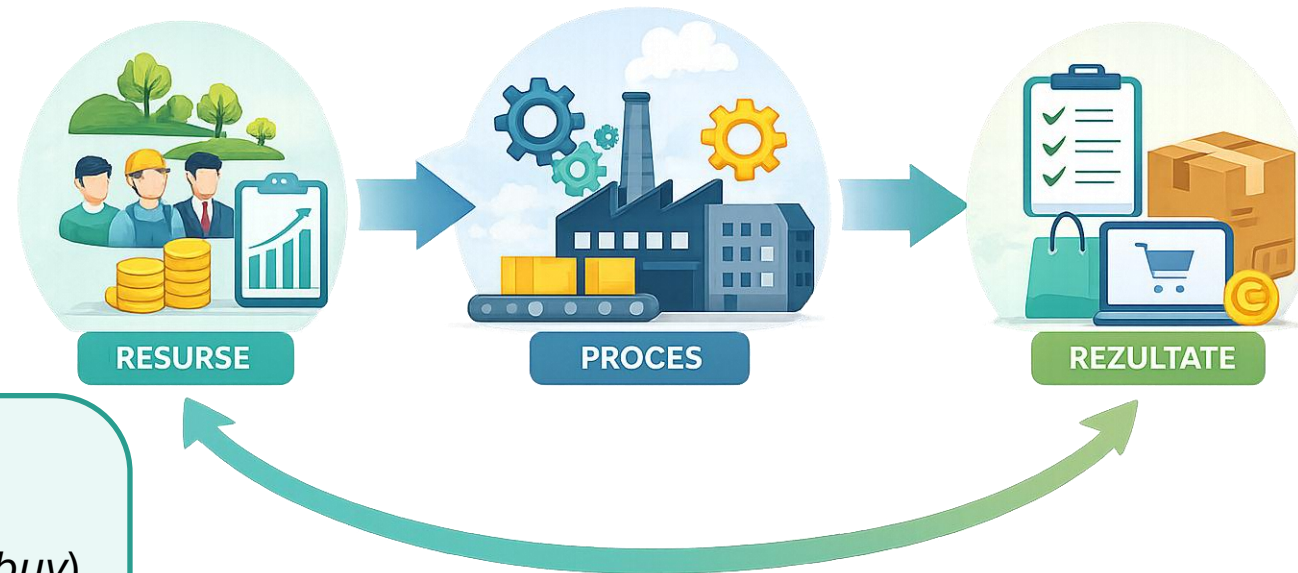
Reprezintă coordonarea procesului prin care resursele de producție sunt transformate în bunuri sau servicii

Resurse de producție: teren, forță de muncă, capital, management

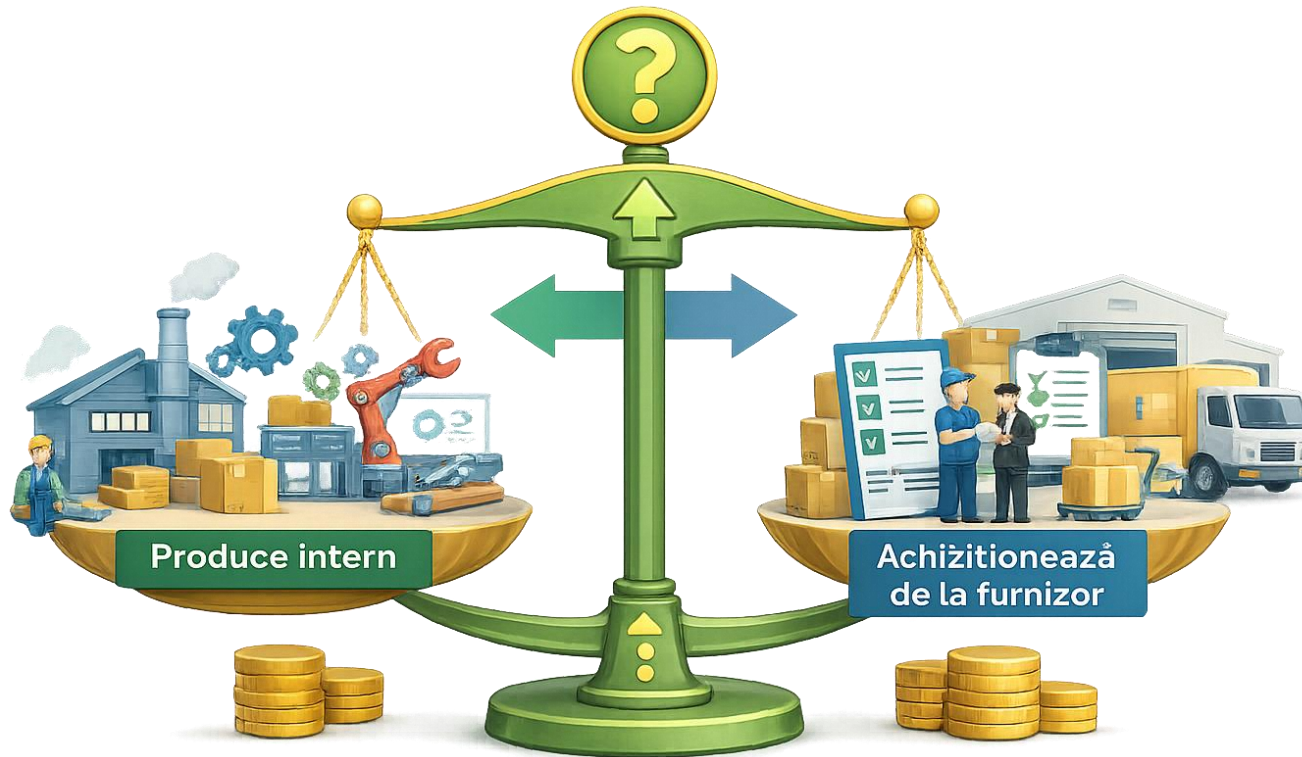
Rezultate: bunuri și servicii

Programarea liniară poate sprijini deciziile din **managementul operațiunilor** privind:

- producția internă sau achiziția externă (*make-or-buy*)
- stabilirea mixului de produse
- planificarea producției
- repartizarea resurselor umane
- controlul stocurilor



Decizii de tip *make-or-buy*



Deciziile de tip *make-or-buy* apar atunci când o companie trebuie să aleagă între producția internă și achiziția externă a unor componente

Programarea liniară poate ajuta la determinarea cantităților care trebuie produse intern și a celor care trebuie cumpărate de la furnizori externi, astfel încât costul total să fie minimizat, respectând resursele disponibile și cerințele de producție

Decizii de tip *make-or-buy* (cont.)

Ex: Compania X intenționează să lanseze două calculatoare noi: **Manager Financiar (MF)**, destinat mediului de afaceri, și **Tehnician (T)**, destinat aplicațiilor de inginerie.

Fiecare calculator este alcătuit din trei componente: o bază, un modul electronic și o carcasă superioară. Baza este comună celor două modele, iar modulele și carcusele sunt diferite. Fiecare componentă poate fi produsă intern sau achiziționată de la furnizori externi.

Costurile unitare de producție în regim standard și prețurile de achiziție externă sunt prezentate în tabel. Se estimează o cerere de **3000 de calculatoare MF** și **2000 de calculatoare T**.

Componentă	Timp de fabricație [min/unitate]
Bază	1.0
Modul pentru MF	3.0
Modul pentru T	2.5
Carcasă pentru MF	1.0
Carcasă pentru T	1.5

Capacitatea de producție este limitată: compania dispune de **200 de ore de producție în regim standard** și de cel mult **50 de ore suplimentare**. Orele suplimentare pot fi utilizate pentru realizarea componentelor și implică un cost suplimentar de **45 lei/oră**. Timpii de fabricație ai componentelor sunt prezentați în tabel.

Compania trebuie să determine câte unități din fiecare componentă vor fi produse intern și câte vor fi achiziționate extern, astfel încât **costul total să fie minimizat**.

Componentă	Cost unitar [lei]	
	Producție în regim standard	Achiziție externă
Bază	2.50	3.00
Modul pentru MF	18.75	20.00
Modul pentru T	16.50	19.50
Carcasă pentru MF	3.00	3.25
Carcasă pentru T	3.75	3.90

Decizii de tip *make-or-buy* (cont.)

Variable de decizie

B^P – numărul de **baze** produse intern

B^A – numărul de **baze** achiziționate extern

M_{MF}^P – numărul de **module** pentru **MF** produse intern

M_{MF}^A – numărul de **module** pentru **MF** achiziționate extern

M_T^P – numărul de **module** pentru **T** produse intern

M_T^A – numărul de **module** pentru **T** achiziționate extern

C_{MF}^P – numărul de **carcase** pentru **MF** produse intern

C_{MF}^A – numărul de **carcase** pentru **MF** achiziționate extern

C_T^P – numărul de **carcase** pentru **T** produse intern

C_T^A – numărul de **carcase** pentru **T** achiziționate extern

O_s – numărul de **ore** suplimentare programate

Baze B , module M , carcase C
produse intern P / achiziționate extern A
Modele: MF / T
Ore suplimentare: O_s

Componentă	Cost unitar [lei]	
	Producție în regim standard	Achiziție externă
Bază	2.50	3.00
Modul pentru MF	18.75	20.00
Modul pentru T	16.50	19.50
Carcasă pentru MF	3.00	3.25
Carcasă pentru T	3.75	3.90

Orele suplimentare implică o primă de **45 lei/oră**

Funcția obiectiv (minimizarea costului total: costurile de producție, de achiziție și cele cu orele suplimentare)

$$\text{Min } 2.5B^P + 3B^A + 18.75M_{MF}^P + 20M_{MF}^A + 16.5M_T^P + 19.5M_T^A + 3C_{MF}^P + 3.25C_{MF}^A + 3.75C_T^P + 3.9C_T^A + 45O_s$$

Decizii de tip *make-or-buy* (cont.)



Constrângeri

C1: $B^P + B^A = 5000$ (baze)

C2: _____ (module pentru MF)

C3: _____ (module pentru T)

C4: _____ (carcase pentru MF)

C5: _____ (carcase pentru T)

- Sunt necesare două constrângeri pentru limitarea capacității de producție în regim standard și suplimentar

Constrângeri

C6: $O_S \leq 50$ (limitare capacitate ore suplimentare)

C7: $1B^P + 3M_{MF}^P + 2.5M_T^P + 1C_{MF}^P + 1.5C_T^P - 60O_S \leq 12,000$ (limitare capacitate producție: timp standard + ore suplimentare)

Constrângeri de nenegativitate: $B^P, B^A, M_{MF}^P, M_{MF}^A, M_T^P, M_T^A, C_{MF}^P, C_{MF}^A, C_T^P, C_T^A, O_S \geq 0$

Se estimează o cerere de **3000 de calculatoare MF** și **2000 de calculatoare T**. [...]

Capacitatea de producție este limitată: compania dispune de **200 de ore de producție în regim standard** și de cel mult **50 de ore suplimentare**.

Componentă	Timp de fabricație [min/unitate]
Bază	1.0
Modul pentru MF	3.0
Modul pentru T	2.5
Carcasă pentru MF	1.0
Carcasă pentru T	1.5

Timp total producție $\leq$ capacitate totală producție (timp standard + ore suplimentare)

- Timpii sunt exprimați în minute: 200 ore standard = $60 \cdot 200 = 12,000$ minute
- Fiecare oră suplimentară adaugă 60 minute de capacitate

Decizii de tip *make-or-buy* (cont.)

Costul asociat cu planul optim este de **122,216.667 lei**

➤ Trebuie **produse intern**:

- toate cele 5000 de baze
- 666.677 module pentru MF
- toate cele 2000 de module pentru T

➤ Trebuie **achiziționate extern**:

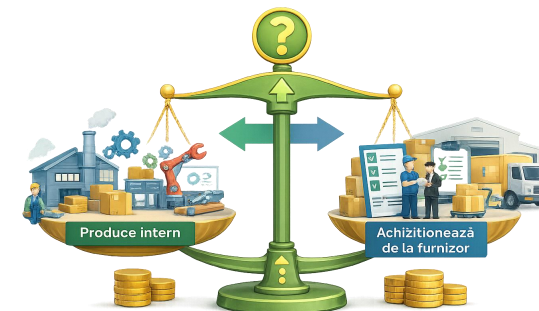
- Restul de 2333 module pentru MF
- toate cele 3000 de carcase pentru MF
- toate cele 2000 de carcase pentru T

➤ Nu este necesară utilizarea **orelor suplimentare**

Dacă variabilele trebuie să fie întregi: costul devine **122,216.75 lei**

Minimizare cost		122216.750				
Componenta	Fabricare	Achiziționare	Numar disponibil		Numar necesar	
Baza	4999	1	5000	=	5000	
Cartus MF	667.000	2333.000	3000	=	3000	
Cartus T	2000	0	2000	=	2000	
Masca MF	0	3000	3000	=	3000	
Masca T	0	2000	2000	=	2000	
Ore suplimentare folosite		0				

Minimizare cost		122216.667				
Componenta	Fabricare	Achiziționare	Numar disponibil		Numar necesar	
Baza	5000	0	5000	=	5000	
Cartus MF	666.667	2333.333	3000	=	3000	
Cartus T	2000	0	2000	=	2000	
Masca MF	0	3000	3000	=	3000	
Masca T	0	2000	2000	=	2000	
Ore suplimentare		0				
			Timp folosit		Timp disponibil	
Ore suplimentare			0	<=	50	
Ore standard			12000	<=	12000	



Decizii de tip *make-or-buy* (cont.)

Microsoft Excel – raport de senzitivitate

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$20	Baza Fabricare	5000	0	2.5	0.083333333	1E+30
\$C\$20	Baza Achizitionare	0	0.083333333	3	1E+30	0.083333333
\$B\$21	Cartus MF Fabricare	666.6666667	0	18.75	0.5	0.25
\$C\$21	Cartus MF Achizitionare	2333.333333	0	20	0.25	0.5
\$B\$22	Cartus T Fabricare	2000	0	16.5	1.958333333	1E+30
\$C\$22	Cartus T Achizitionare	0	1.958333333	19.5	1E+30	1.958333333
\$B\$23	Masca MF Fabricare	0	0.166666667	3	1E+30	0.166666667
\$C\$23	Masca MF Achizitionare	3000	0	3.25	0.166666667	1E+30
\$B\$24	Masca T Fabricare	0	0.475	3.75	1E+30	0.475
\$C\$24	Masca T Achizitionare	2000	0	3.9	0.475	1E+30
\$B\$26	Ore suplimentare folosite Fabrica	0	20	45	1E+30	20

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$D\$20	Baza Numar disponibil	5000	2.916666667	5000	2000	5000
\$D\$21	Cartus MF Numar disponibil	3000	20	3000	1E+30	2333.333333
\$D\$22	Cartus T Numar disponibil	2000	17.54166667	2000	800	2000
\$D\$23	Masca MF Numar disponibil	3000	3.25	3000	1E+30	3000
\$D\$24	Masca T Numar disponibil	2000	3.9	2000	1E+30	2000
\$D\$29	Ore suplimentare Timp folosit	0	0	0	1E+30	50
\$D\$30	Ore standard Timp folosit	12000	-0.416666667	0	7000	2000

Costul redus al variabilei O_S este **20**.

Deoarece orele suplimentare nu sunt utilizate în soluția optimă, prima pentru ore suplimentare ar trebui să scadă cu **20 lei/oră**, de la **45 lei/oră** la **25 lei/oră**, pentru ca utilizarea lor să devină atractivă

Dacă prima ar fi **mai mică de 25 lei/oră**, compania ar putea reduce costul total prin înlocuirea unor componente achiziționate extern cu componente produse intern, utilizând ore suplimentare

La 25 lei/oră pot apărea soluții optime alternative; sub acest prag, utilizarea orelor suplimentare devine avantajoasă

Prețul umbră pentru capacitatea de producție în regim standard este **-0.417 lei/minut**

O creștere a capacității standard cu 1 minut reduce costul optim cu aproximativ **0.417 lei**

Echivalent, valoarea marginală a unei ore suplimentare de capacitate standard este: **$0.417 \cdot 60 = 25.02$ lei/oră**

Intervalul admisibil pentru capacitatea standard este:
 $10,000 \leq \text{capacitate standard} \leq 19,000$ minute
 (aproximativ: $166.667 \leq \text{ore standard} \leq 316.667$)

Decizii de tip *make-or-buy* (cont.)

Microsoft Excel – raport de senzitivitate

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$20	Baza Fabricare	5000	0	2.5	0.083333333	1E+30
\$C\$20	Baza Achizitionare	0	0.083333333	3	1E+30	0.083333333
\$B\$21	Cartus MF Fabricare	666.6666667	0	18.75	0.5	0.25
\$C\$21	Cartus MF Achizitionare	2333.333333	0	20	0.25	0.5
\$B\$22	Cartus T Fabricare	2000	0	16.5	1.958333333	1E+30
\$C\$22	Cartus T Achizitionare	0	1.958333333	19.5	1E+30	1.958333333
\$B\$23	Masca MF Fabricare	0	0.166666667	3	1E+30	0.166666667
\$C\$23	Masca MF Achizitionare	3000	0	3.25	0.166666667	1E+30
\$B\$24	Masca T Fabricare	0	0.475	3.75	1E+30	0.475
\$C\$24	Masca T Achizitionare	2000	0	3.9	0.475	1E+30
\$B\$26	Ore suplimentare folosite Fabrica	0	20	45	1E+30	20

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$D\$20	Baza Numar disponibil	5000	2.916666667	5000	2000	5000
\$D\$21	Cartus MF Numar disponibil	3000	20	3000	1E+30	2333.333333
\$D\$22	Cartus T Numar disponibil	2000	17.54166667	2000	800	2000
\$D\$23	Masca MF Numar disponibil	3000	3.25	3000	1E+30	3000
\$D\$24	Masca T Numar disponibil	2000	3.9	2000	1E+30	2000
\$D\$29	Ore suplimentare Timp folosit	0	0	0	1E+30	50
\$D\$30	Ore standard Timp folosit	12000	-0.416666667	0	7000	2000

O modificare a prețurilor percepute de furnizorii externi poate afecta structura soluției optime

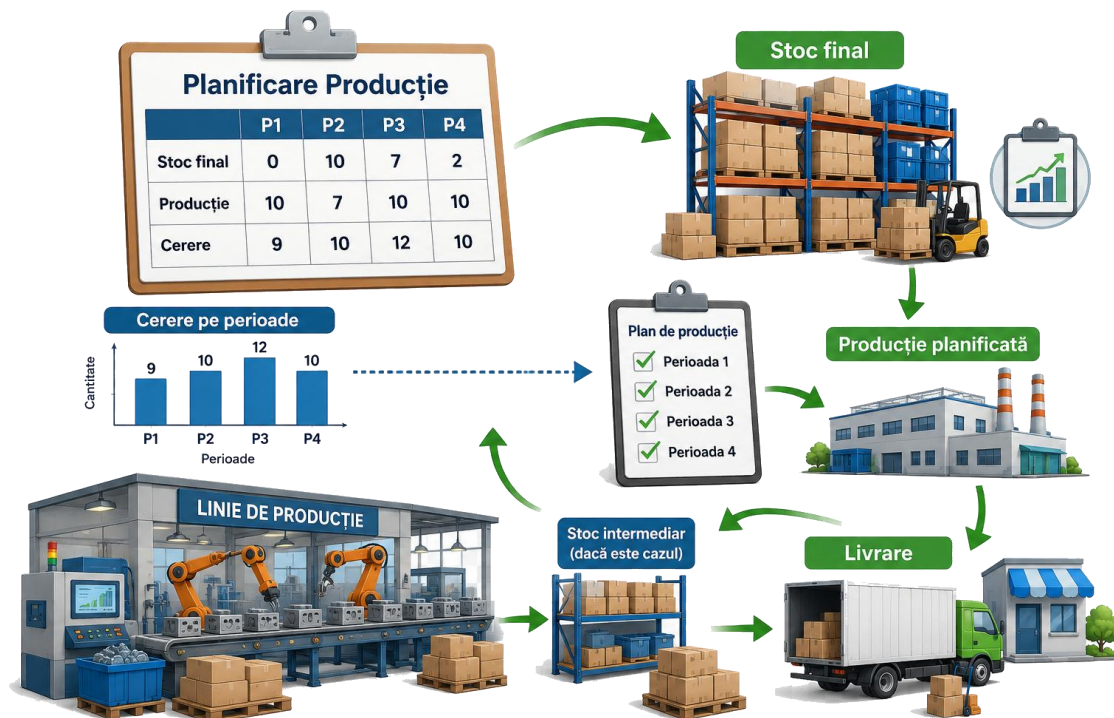
- Pentru variabila **baze achiziționate extern**, costul unitar curent este **3 lei/unitate**, iar scăderea admisibilă este **0.083 lei/unitate**

$$3 - 0.083 \cong 2.917 \text{ lei/unitate}$$
- Dacă prețul de achiziție pentru baze este peste **2.91(6) lei/unitate**, compania continuă să producă toate bazele intern
- La pragul de **2,91(6) lei/unitate**, pot apărea soluții optime alternative
- Dacă prețul scade sub **2.91(6) lei/unitate**, compania ar putea începe să cumpere baze de la furnizori externi



Planificarea producției

Planificarea producției este o aplicație importantă a programării liniare, în care deciziile de producție sunt stabilite pe mai multe perioade de timp



Obiectiv

Stabilirea unui program de producție care să asigure:

- satisfacerea cererii
 - utilizarea eficientă a resurselor
 - minimizarea costurilor totale
- pentru unul sau mai multe produse, pe parcursul unei perioade de planificare

Constrângeri

- capacitate limitată de producție
- disponibilitate limitată a forței de muncă
- capacitate limitată de stocare
- cerere care trebuie satisfăcută în fiecare perioadă



Planificarea producției (cont.)

Avantaj – probleme repetitive

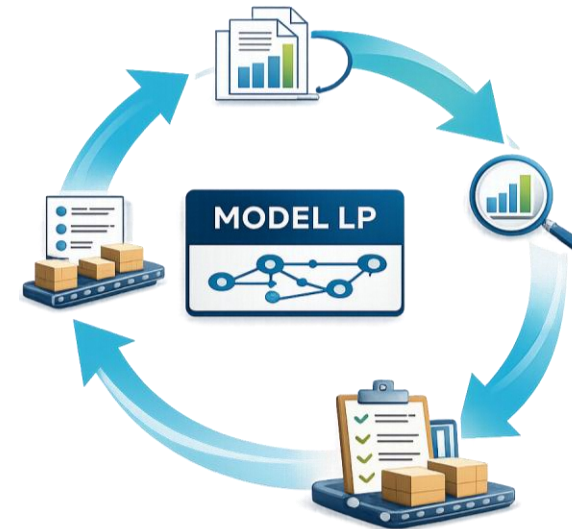
De ce este o problemă repetitivă?

În planificarea producției, programul de producție trebuie actualizat periodic, de exemplu lunar

De la o perioadă la alta, cererea se poate modifica, iar evoluția cererii este mai greu de prevăzut

Multe elemente ale problemei rămân relativ constante:

- timpii de producție
- capacitățile disponibile
- limitele spațiului de stocare
- structura costurilor



Avantajul modelului LP

Managerul de producție rezolvă, de fapt, aceeași problemă decizională, cu date actualizate pentru perioada curentă

După formularea modelului LP, acesta poate fi reutilizat prin introducerea noilor date:

- cerere estimată
- capacități de producție
- disponibilitatea forței de muncă
- spațiul de stocare disponibil

Astfel, modelul permite **generarea rapidă a unui nou program de producție** pentru fiecare perioadă analizată

Planificarea producției (cont.)

Ex: Compania X produce două componente electronice diferite pentru un mare producător de motoare pentru avioane. Producătorul Y transmite trimestrial către departamentul de vânzări al companiei X necesarul lunar de componente pentru următoarele trei luni.

Necesarul lunar poate varia considerabil, în funcție de tipul de motor fabricat de producătorul Y. Cererea pentru perioada următoare este prezentată în tabel.

Componentă	Aprilie	Mai	Iunie
322A	1000	3000	5000
802B	1000	500	3000

După prelucrarea comenzii, informațiile sunt transmise departamentului de planificare și control al producției. Acesta trebuie să elaboreze un plan de producție pentru următorul trimestru. În urma planificării, directorul de producție dorește să determine:

- costul total de producție
- costul de menținere a stocului
- costurile generate de modificarea nivelului de producției

Costul de producție este de **100 lei/unitate** pentru componenta **322A** și de **50 lei/unitate** pentru componenta **802B**. Costul de menținere a stocului este de **1.5% din costul produsului**.

Pe baza efectelor estimate ale disponibilizării angajaților, circulației mărfurilor, realocării resurselor, costurilor de formare și altor costuri asociate fluctuațiilor nivelului de producție, compania X estimează:

- un cost de **2.5 lei/unitate** pentru creșterea nivelului de producție într-o lună
- un cost de **1 leu/unitate** pentru scăderea nivelului de producție într-o lună

Planificarea producției (cont.)

Să presupunem că stocurile inițiale, la începutul perioadei de planificare de trei luni, sunt de **500 de unități** pentru componenta **322A** și **200 de unități** pentru componenta **802B**.

La sfârșitul perioadei de trei luni, compania X dorește să mențină în stoc cel puțin **400 de unități** din componenta **322A** și cel puțin **200 de unități** din componenta **802B**.

Nivelul de producție pentru luna martie, cu o lună înainte de începerea perioadei curente de planificare a producției, a fost de **1500 de unități** pentru componenta **322A** și **1000 de unități** pentru componenta **802B**.

Lună	Capacitate		
	Utilaje [ore]	Forță de muncă [ore]	Stocare [mp]
Aprilie	400	300	10,000
Mai	500	300	10,000
Iunie	600	300	10,000

Componentă	Utilaje [ore/unitate]	Forță de muncă [ore/unitate]	Stocare [mp/unitate]
322A	0.1	0.05	2
802B	0.08	0.07	3

Din experiența anterioară, compania dispune de informații privind capacitatea disponibilă a utilajelor, a forței de muncă și a spațiului de stocare.

Consumul de resurse necesar pentru realizarea unei unități din fiecare componentă, precum și spațiul de stocare necesar pentru o unitate de produs, sunt prezentate în tabel.

Obiectivul companiei X este să minimizeze costul total asociat producției, menținerii stocului și modificării nivelului de producție.

Planificarea producției (cont.)

Variabile de decizie

x_{im} – volumul producției pentru componenta i , în luna m , exprimat în unități ($i = \overline{1,2}$; $m = \overline{1,3}$)

- $i = 1$ – componenta 322A; $i = 2$ – componenta 802B
- $m = 1$ – aprilie; $m = 2$ – mai; $m = 3$ – iunie

s_{im} – stocul componentei i la sfârșitul lunii m

C_m – creșterea nivelului total de producție în luna m , față de luna precedentă

S_m – scăderea nivelului total de producție în luna m , față de luna precedentă

Dublul subscript
permite identificarea
directă a componentei
și a lunii

➤ Funcția obiectiv:

Min

Cost producție

+

Cost menținere
stoc

+

Cost modificare
nivel producție

Planificarea producției (cont.)

➤ Funcția obiectiv:

Min

Cost producție

+

Cost menținere
stoc

+

Cost modificare
nivel producție

Cost producție: $100x_{11} + 100x_{12} + 100x_{13} + 50x_{21} + 50x_{22} + 50x_{23}$

Costul de producție pe unitate este constant în toate lunile. Prin urmare, nu influențează alegerea planului optim, dar este inclus pentru calcularea costului total

Dacă însă costul unitar ar varia de la o lună la alta, costurile de producție pe produs și pe lună ar trebui incluse în funcția obiectiv

Costul de producție este de **100 lei/unitate** pentru componenta **322A** și de **50 lei/unitate** pentru componenta **802B**

Cost menținere stoc: _____

Pentru componenta 322A: $0.015 \cdot 100 = 1.5$ lei

Pentru componenta 802B: $0.015 \cdot 50 = 0.75$ lei

În model, stocul final lunar este utilizat ca aproximare a stocului mediu lunar. Această ipoteză este frecvent utilizată în modelele LP de planificare a producției

Costul de menținere a stocului este de **1.5% din costul produsului**

Cost modificare nivel producție: _____

Costul modificării nivelului de producție depinde de variația producției totale în luna m față de luna precedent

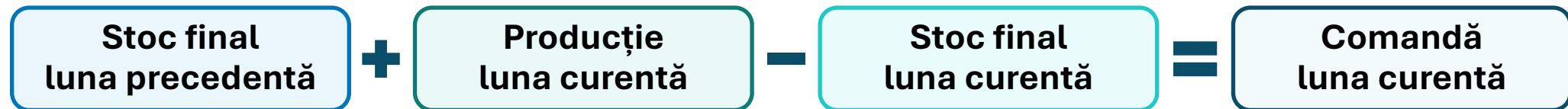
În alte aplicații de planificare a producției, aceste fluctuații pot fi măsurate și prin alți indicatori, precum ore-mașină sau ore de muncă necesare, nu doar prin numărul total de unități produse

[...] compania X estimează: un cost de **2.5 lei/unitate** pentru creșterea nivelului de producție într-o lună; un cost de **1 leu/unitate** pentru scăderea nivelului de producție într-o lună

Planificarea producției (cont.)

➤ **Constrângeri:** planificarea trebuie să corespundă cererii clienților

C1 – C6: cererea fiecărei luni trebuie satisfăcută din producția lunii curente și/sau din stocul rămas din luna precedentă. Pentru fiecare componentă și fiecare lună, constrângerea de bilanț este:



- Luna 1 (aprilie):
 $500 + x_{11} - s_{11} = 1000 \Rightarrow x_{11} - s_{11} = 500$
 $200 + x_{21} - s_{21} = 1000 \Rightarrow x_{21} - s_{21} = 800$
- Luna 2 (mai):
 $s_{11} + x_{12} - s_{12} = 3000$
 $s_{21} + x_{22} - s_{22} = 500$
- Luna 3 (iunie):

Să presupunem că stocurile inițiale, la începutul perioadei de planificare de trei luni, sunt de **500 de unități** pentru componenta **322A** și **200 de unități** pentru componenta **802B**

Componentă	Aprilie	Mai	Iunie
322A	1000	3000	5000
802B	1000	500	3000

Planificarea producției (cont.)

La sfârșitul perioadei de trei luni, compania X dorește să mențină în stoc cel puțin **400 de unități** din componenta **322A** și cel puțin **200 de unități** din componenta **802B**

C7 – C8: nivel minim de stoc la sfârșitul perioadei

$$s_{13} \geq 400$$

$$s_{23} \geq 200$$

Componentă	Utilaje [ore/unitate]	Forță de muncă [ore/unitate]	Stocare [mp/unitate]
322A	0.1	0.05	2
802B	0.08	0.07	3

C9 – C11: capacitatea utilajelor

- Luna 1 (aprilie): $0.1x_{11} + 0.08x_{21} \leq 400$
- Luna 2 (mai): _____
- Luna 3 (iunie): _____

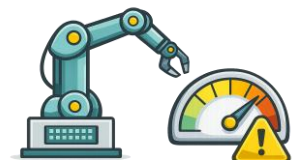
Lună	Capacitate		
	Utilaje [ore]	Forță de muncă [ore]	Stocare [mp]
Aprilie	400	300	10,000
Mai	500	300	10,000
Iunie	600	300	10,000

C12 – C14: capacitatea forței de muncă

- Luna 1: $0.05x_{11} + 0.07x_{21} \leq 300$
- Luna 2: _____
- Luna 3: _____

C15 – C17: capacitatea de stocare

- Luna 1: $2s_{11} + 3s_{21} \leq 10,000$
- Luna 2: _____
- Luna 3: _____



Planificarea producției (cont.)

- Se adaugă un set de constrângeri pentru a lega variabilele C_m și S_m de modificarea nivelului total de producție de la o lună la alta

C18 – C20:

Producție
luna curentă

–

Producție
luna anterioară

=

Modificare nivel
producție luna curentă

- Modificarea poate fi pozitivă sau negativă

- O modificare pozitivă reflectă o creștere a nivelului total de producție
- O modificare negativă reflectă o scădere a nivelului total de producție

- Luna 1 (aprilie): $(x_{11} + x_{21}) - (1500 + 1000) = C_1 - S_1$

- Luna 2 (mai): $(x_{12} + x_{22}) - (x_{11} + x_{21}) = C_2 - S_2$

- Luna 3 (iunie): $(x_{13} + x_{23}) - (x_{12} + x_{22}) = C_3 - S_3$

Nivelul de producție pentru luna martie, cu o lună înainte de începerea perioadei curente de planificare a producției, a fost de **1500 de unități** pentru componenta **322A** și **1000 de unități** pentru componenta **802B**

Într-o lună, producția totală poate fie să crească, fie să scadă față de luna precedentă, iar C_m și S_m vor fi zero alternativ

- Dacă în aprilie se produc 3000 unități, atunci: $C_1 = 500$, $S_1 = 0$
- Dacă în aprilie se produc 2200 unități, atunci: $C_1 = 0$, $S_1 = 300$

În soluția optimă, pentru fiecare lună, cel mult una dintre variabilele C_m și S_m poate fi pozitivă: producția fie crește, fie scade, nu ambele simultan

- Constrângeri de nenegativitate: $x_{im}, s_{im}, C_m, S_m \geq 0$

Planificarea producției (cont.)

De la un exemplu simplu la probleme reale

Problema de planificare analizată este relativ simplă: două produse, trei luni, un singur tip de utilaj, un singur tip de forță de muncă și o singură zonă de depozitare

- Chiar și în acest caz, modelul LP conține **18 variabile de decizie** și **20 de constrângeri**

Problemă reală

Problemele reale de planificare a producției implică, de obicei, mai multe produse, mai multe tipuri de utilaje, mai multe categorii de forță de muncă și/ sau mai multe zone de depozitare

- De exemplu, o problemă cu **100 de produse** și o perioadă de planificare de **12 luni** poate conduce la peste **1000 de variabile și constrângeri**
Astfel de probleme nu pot fi urmărite eficient manual

Idee-cheie: modelele LP permit formularea, rezolvarea și actualizarea rapidă a unor probleme complexe de planificare a producției, contribuind la obținerea unor programe de producție eficiente și cu costuri reduse

Planificarea producției: de la model la raport managerial

	Productie			Stoc final				Modificare nivel productie		
	Aprilie	Mai	Iunie	Aprilie	Mai	Iunie		Aprilie	Mai	Iunie
322A	500	3200	5200	0	200	400	Crestere	500	2200	0
802B	2500	2000	0	1700	3200	200	Scadere	0	0	0
Minimizare cost	1126475									
							Constrangeri pentru capacitate			Modif nivel productie
Stoc initial + Productie - Stoc final			Comanda			Folosit	Disponibil	Luna crt - Luna ant		C-S
322A/Aprilie	1000	=	1000	Utilaje/Aprilie	250	<=	400	Aprilie	500	= 500
802B/Aprilie	1000	=	1000	Utilaje/Mai	480	<=	500	Mai	2200	= 2200
322A/Mai	3000	=	3000	Utilaje/Iunie	520	<=	600	Iunie	0	= 0
802B/Mai	500	=	500	F. munca/Aprilie	200	<=	300			
322A/Iunie	5000	=	5000	F. munca/Mai	300	<=	300			
802B/Iunie	3000	=	3000	F. munca/Iunie	260	<=	300			
				Stocare/Aprilie	5100	<=	10000			
			Constangere	Stocare/Mai	10000	<=	10000			
			Stoc final	Stocare/Iunie	1400	<=	10000			
322A	400	>=	400							
802B	200	>=	200							

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$24	322A Aprilie	500	0	100	1E+30	0.861111111
\$C\$24	322A Mai	3200	0	100	0.464285714	0.5
\$D\$24	322A Iunie	5200	0	100	0.5	0.464285714
\$E\$24	322A Aprilie	0	0.861111111	1.5	1E+30	0.861111111
\$F\$24	322A Mai	200	0	1.5	0.464285714	0.5
\$G\$24	322A Iunie	400	0	1.5	1E+30	103.6388889
\$B\$25	802B Aprilie	2500	0	50	0.65	0.25
\$C\$25	802B Mai	2000	0	50	0.25	0.65
\$D\$25	802B Iunie	0	0.638888889	50	1E+30	0.638888889
\$E\$25	802B Aprilie	1700	0	0.75	0.65	0.25
\$F\$25	802B Mai	3200	0	0.75	0.638888889	52.25
\$G\$25	802B Iunie	200	0	0.75	1E+30	52.25
\$I\$24	Crestere Aprilie	500	0	2.5	0.65	0.25
\$K\$24	Crestere Mai	2200	0	2.5	0.166666667	0.958333333
\$L\$24	Crestere Iunie	0	0.361111111	2.5	1E+30	0.361111111
\$J\$25	Scadere Aprilie	0	3.5	1	1E+30	3.5
\$K\$25	Scadere Mai	0	3.5	1	1E+30	3.5
\$L\$25	Scadere Iunie	0	3.138888889	1	1E+30	3.138888889

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$31	322A/Aprilie Aprilie	1000	100	1000	1500	500
\$B\$32	802B/Aprilie Aprilie	1000	50	1000	1428.571429	500
\$B\$33	322A/Mai Aprilie	3000	100.6388889	3000	600	5.00222E-12
\$B\$34	802B/Mai Aprilie	500	50.75	500	1428.571429	500
\$B\$35	322A/Iunie Aprilie	5000	102.1388889	5000	1.42921E-12	257.1428571
\$B\$36	802B/Iunie Aprilie	3000	51.5	3000	7.4107E-13	500
\$B\$40	322A Stoc final	400	103.6388889	400	1.42921E-12	257.1428571
\$B\$41	802B Stoc final	200	52.25	200	7.4107E-13	200
\$G\$31	Utilaje/Aprilie Folosit	250	0	400	1E+30	150
\$G\$32	Utilaje/Mai Folosit	480	0	500	1E+30	20
\$G\$33	Utilaje/Iunie Folosit	520	0	600	1E+30	80
\$G\$34	F. munca/Aprilie Folosit	200	0	300	1E+30	100
\$G\$35	F. munca/Mai Folosit	300	-5.555555556	300	18	1.00044E-13
\$G\$36	F. munca/Iunie Folosit	260	0	300	1E+30	40
\$G\$37	Stocare/Aprilie Folosit	5100	0	10000	1E+30	4900
\$G\$38	Stocare/Mai Folosit	10000	0	10000	1E+30	2.22321E-12
\$G\$39	Stocare/Iunie Folosit	1400	0	10000	1E+30	8600
\$K\$31	Aprilie Modif nivel product	500	-2.5	0	500	1E+30
\$K\$32	Mai Modif nivel productie	2200	-2.5	0	2200	1E+30
\$K\$33	Iunie Modif nivel productie	0	-2.138888889	0	257.1428571	1.42921E-12

Raport managerial

Planificarea producției: raport managerial

Activitate		Aprilie	Mai	Iunie
Producție	Componenta 322A	500	3200	5200
	Componenta 802B	2500	2000	0
	Total	3000	5200	5200
Stoc final	Componenta 322A	0	200	400
	Componenta 802B	1700	3200	200
Utilizare utilaj	Ore planificate	250	480	520
	Capacitate de reducere	150	20	80
Utilizare forță de muncă	Ore planificate	200	300	260
	Capacitate de reducere	100	0	40
Utilizare stocare	Stoc planificat	5100	10,000	1400
	Capacitate de reducere	4900	0	8600
Cost total (producție, stoc, rectificare producție) = 1, 126, 475 lei				

În raportul managerial se observă variația lunară a producției și a stocurilor

➤ Costul de menținere a stocului pentru componenta 802B este mai mic decât pentru componenta 322A, deoarece costul unitar al componentei 802B este jumătate din cel al componentei 322A

- Prin urmare, în prima lună sunt produse mai multe componente 802B decât este necesar imediat, iar **surplusul** este **păstrat în stoc** pentru comenzile din lunile următoare
- Componenta 322A tinde să fie produsă mai aproape de momentul cererii, iar **pe stoc** sunt **păstrate doar cantități reduse**

Planificarea producției: raport managerial (cont.)

Activitate		Aprilie	Mai	Iunie
Producție	Componenta 322A	500	3200	5200
	Componenta 802B	2500	2000	0
	Total	3000	5200	5200
Stoc final	Componenta 322A	0	200	400
	Componenta 802B	1700	3200	200
Utilizare utilaj	Ore planificate	250	480	520
	Capacitate de reducere	150	20	80
Utilizare forță de muncă	Ore planificate	200	300	260
	Capacitate de reducere	100	0	40
Utilizare stocare	Stoc planificat	5100	10,000	1400
	Capacitate de reducere	4900	0	8600
Cost total (producție, stoc, rectificare producție) = 1, 126, 475 lei				

- Costurile asociate creșterii și scăderii nivelului total de producție tind să reducă variațiile mari de la o lună la alta
 - Soluția optimă presupune creșterea producției totale cu **500 unități** în luna aprilie și cu **2200 unități** în luna mai
 - **Nivelul total de producție din luna mai este menținut și în luna iunie**
- Utilizarea utilajelor rămâne sub capacitatea disponibilă în toate cele trei luni
- **Forța de muncă este utilizată la capacitate maximă în luna mai**
 - Prețul umbră indică faptul că o oră suplimentară de forță de muncă în luna mai ar reduce costul total cu aproximativ **5.56 lei**

Jeppesen Sanderson, Inc. producea și distribuia manuale de zbor care conțineau informații de siguranță pentru peste **300,000 de piloți** și aproximativ **4000 de companii aeriene**

- În fiecare săptămână, Jeppesen trimitea **între 5 și 30 de milioane de pagini** de rectificări către aproximativ **200,000 de clienți** din întreaga lume
- Compania primea săptămânal aproximativ **1500 de comenzi noi**
- La sfârșitul anilor 1990, calitatea serviciului pentru clienți s-a deteriorat, deoarece sistemele existente de producție și suport nu mai puteau susține acest nivel de activitate
- Pentru a răspunde cerințelor clienților, Jeppesen a utilizat metode de optimizare pentru fundamentarea deciziilor de planificare a producției

Optimizarea producției manualelor de zbor la Jeppesen Sanderson, Inc.¹

¹E. Katok, W. Tarantino, R. Tiedman, "Improving Performance and Flexibility at Jeppesen: The World's Leading Aviation-Information Company", *Interfaces* (January/February 2001): 7–29

Jeppesen a dezvoltat un program liniar la scară largă, numit **Scheduler**, pentru minimizarea costului realizării rectificărilor săptămânale

- Constrângerile modelului au inclus capacitatea de producție și numeroase reguli interne de afaceri
- Modelul conținea aproximativ **250,000 de variabile** și între **40,000** și **50,000 de constrângeri**
- După introducerea modelului, Jeppesen a reușit să stabilească un nou record: **patru săptămâni consecutive cu 100% dintre rectificări livrate la timp**
- Costurile asociate întârzierilor rectificărilor au scăzut de la aproximativ **9% la 3%**
- **Scheduler** a furnizat un model al sistemului de producție utilizat ulterior în analiza economico-strategică

Impact managerial: în ansamblu, utilizarea tehnicilor de optimizare la Jeppesen a contribuit la **reducerea costurilor cu aproape 10%** și la **creșterea profitului cu aproximativ 24%**

Optimizarea producției manualelor de zbor la Jeppesen Sanderson, Inc.¹

¹E. Katok, W. Tarantino, R. Tiedman, "Improving Performance and Flexibility at Jeppesen: The World's Leading Aviation-Information Company", *Interfaces* (January/February 2001): 7–29

La momentul studiului, Kellogg era unul dintre cei mai mari producători de cereale din lume și producea o gamă largă de produse alimentare, inclusiv **Kellogg's Pop-Tarts** și batoane de cereale **Nutri-Grain**

- Kellogg producea peste **40 de tipuri de cereale** în fabrici din **19 țări**, pe șase continente
- Produsele companiei erau comercializate în peste **160 de țări**, iar compania avea aproximativ **15,600 de angajați**
- Numai în domeniul cerealelor, Kellogg coordona producția a aproximativ **80 de produse**, utilizând aproape **90 de linii de producție** și **180 de linii de ambalare**

Kellogg avea o experiență îndelungată în utilizarea programării liniare pentru planificarea producției și distribuției. Sistemul **Kellogg Planning System (KPS)** reprezenta un program liniar de mari dimensiuni, formulat pe mai multe perioade de timp

Optimizarea producției, stocurilor și distribuției la Kellogg²

²G. Brown, J. Keegan, B. Vigus, K. Wood, "The Kellogg Company Optimizes Production, Inventory, and Distribution", *Interfaces* (November/December 2001): 1–15

Versiunea operațională a KPS sprijinea deciziile privind producția, ambalarea, stocurile și distribuția, pe orizont săptămânal

- **Obiectivul principal** al sistemului era **minimizarea costului total** necesar pentru **satisfacerea cererii estimate**
- Modelul includea **constrângeri** privind **capacitățile liniilor de producție**, **capacitățile liniilor de ambalare** și **cerințele** privind **stocul de siguranță**

O versiune tactică a KPS era utilizată pentru stabilirea bugetelor fabricilor și pentru decizii legate de extinderea, reducerea sau consolidarea capacităților

- Versiunea tactică a fost utilizată pentru identificarea unei consolidări a capacității de producție care a condus la **economii estimate între 35 și 40 de milioane de dolari anual**
- Datorită succesului KPS în America de Nord, compania a introdus sistemul și în America Latină și a analizat dezvoltarea unui model global KPS

Optimizarea producției, stocurilor și distribuției la Kellogg²

²G. Brown, J. Keegan, B. Vigus, K. Wood, "The Kellogg Company Optimizes Production, Inventory, and Distribution", *Interfaces* (November/December 2001): 1–15

Repartizarea forței de muncă

Repartizarea forței de muncă apare atunci când managerul trebuie să **aloce personalul** disponibil între **activități**, **departamente** sau **perioade de timp**

Situația este frecventă atunci când:

- cererea de personal variază în timp
- angajații pot fi transferați între departamente
- unele persoane au competențe multiple
- se urmărește utilizarea eficientă a resurselor umane

Obiectiv

Determinarea celei mai bune alocări a personalului, astfel încât:

- necesarul de forță de muncă să fie acoperit
- competențele angajaților să fie utilizate eficient
- costurile de personal să fie minimizate
- constrângerile privind disponibilitatea personalului să fie respectate



Repartizarea forței de muncă (cont.)

Ex: Compania X fabrică două produse, cu profituri unitare de **50 lei**, respectiv **45 lei**. Pentru fabricarea fiecărui produs sunt necesare ore de muncă în patru departamente. Necesarul de ore de muncă pe unitate de produs și numărul total de ore disponibile în fiecare departament sunt prezentate în tabel.

Se dorește determinarea numărului de unități care trebuie fabricate din fiecare produs, astfel încât **profitul total să fie maxim**, respectând orele de muncă disponibile în cele patru departamente.

Departament	Ore de muncă necesare/unitate		Ore disponibile
	Produs 1	Produs 2	
1	0.65	0.95	6500
2	0.45	0.85	6000
3	1.00	0.70	7000
4	0.15	0.30	1400

Variable de decizie

P_i – numărul de unități fabricate din produsul i

- $i = 1$ – produsul 1
- $i = 2$ – produsul 2

Model matematic

$$\begin{array}{llll} \text{Max} & 50P_1 & +45P_2 & \text{(funcția obiectiv)} \\ \text{s. t.} & 0.65P_1 & +0.95P_2 & \leq 6500 \text{ (departament 1)} \\ & 0.45P_1 & +0.85P_2 & \leq 6000 \text{ (departament 2)} \\ & 1.00P_1 & +0.70P_2 & \leq 7000 \text{ (departament 3)} \\ & 0.15P_1 & +0.30P_2 & \leq 1400 \text{ (departament 4)} \\ & P_1, & P_2 & \geq 0 \text{ (nenegativitate)} \end{array}$$

Repartizarea forței de muncă (cont.)

Planificare productie		Ore de munca			
P1	P2	Folosite		Disponibile	Diferenta
5744.00	1794.00	5437.90	<=	6500.00	1062.10
		4109.70	<=	6000.00	1890.30
		6999.80	<=	7000.00	0.20
		1399.80	<=	1400.00	0.20
Maximizare profit		367930.00			

- **Soluția optimă** indică fabricarea următoarelor cantități:
 - **5744 unități** din produsul 1
 - **1794 unități** din produsul 2
- **Profitul maxim** obținut este de **367,930 lei**

Interpretarea capacităților

- Departamentele 3 și 4 sunt **aproape complet utilizate**
 - Rămân doar 0.2 ore disponibile în fiecare dintre cele două departamente
- Departamentul 1: rămân **1062.1 ore disponibile**
- Departamentul 2: rămân **1890.3 ore disponibile**
- Rezultatele sugerează că profitul ar putea crește prin realocarea unei părți din forța de muncă disponibilă în departamentele 1 și 2 către departamentele 3 și 4
 - Totuși, modelul actual nu indică exact cum trebuie realizată această realocare



Repartizarea forței de muncă (cont.)

Ex: Să presupunem că firma are un program de **instruire încrucișată** a personalului, care permite transferul unor angajați între departamente.

Datorită acestor competențe multiple, un număr limitat de **ore de muncă** poate fi transferat de la un departament la altul, conform tabelului.

Departament sursă	Departament destinație				Număr maxim de ore transferabile
	1	2	3	4	
1	-	Da	Da	-	400
2	-	-	Da	Da	800
3	-	-	-	Da	100
4	Da	Da	-	-	200

Tabelul indică transferurile permise între departamente

- De exemplu, primul rând arată că angajații din departamentul 1 pot fi transferați către departamentele 2 și 3
- Ultima coloană arată numărul maxim de ore care pot fi transferate din fiecare departament în perioada analizată

Când forța de muncă este flexibilă, modelul LP inițial nu mai este suficient pentru a descrie toate posibilitățile de alocare

- Trebuie introduse **variabile de decizie suplimentare**, care să descrie transferurile de ore de muncă între departamente



Repartizarea forței de muncă (cont.)

Variabile de decizie

P_i – numărul de unități fabricate din produsul i ; $i = 1, 2$

Suplimentare

h_j – număr de ore alocate la departamentul j ; $j = \overline{1, 4}$

t_{jk} – numărul de ore de muncă transferate din departamentul j către departamentul k ; $j, k = \overline{1, 4}$

➤ Constrângeri:

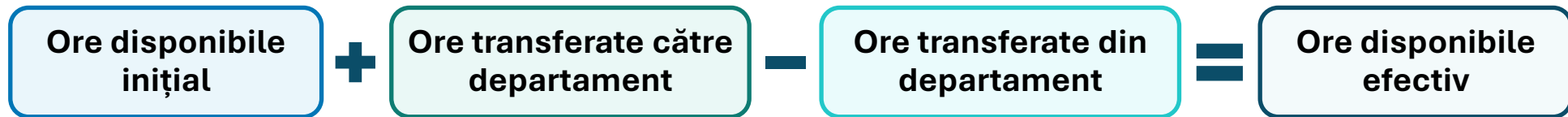
C1 – C4: orele de muncă utilizate nu pot depăși orele de muncă după transferuri

- Departament 1: $0.65P_1 + 0.95P_2 \leq h_1$
- Departament 2: $0.45P_1 + 0.85P_2 \leq h_2$
- Departament 3: $1.00P_1 + 0.70P_2 \leq h_3$
- Departament 4: $0.15P_1 + 0.30P_2 \leq h_4$

Departament	Ore de muncă necesară/unitate		Ore disponibile
	Produs 1	Produs 2	
1	0.65	0.95	6500
2	0.45	0.85	6000
3	1.00	0.70	7000
4	0.15	0.30	1400

Repartizarea forței de muncă (cont.)

C5 – C8: orele de muncă disponibile efectiv în fiecare departament



- Departament 1: $6500 + t_{41} - (t_{12} + t_{13}) = h_1 \Rightarrow h_1 - t_{41} + t_{12} + t_{13} = 6500$
- Departament 2: _____
- Departament 3: _____
- Departament 4: _____

Departament	Ore disponibile
1	6500
2	6000
3	7000
4	1400

C9 – C12: numărul de ore care pot fi transferate din fiecare departament este limitat; de aceea se introduc restricții privind capacitatea de transfer

- Departament 1: $t_{12} + t_{13} \leq 400$
- Departament 2: $t_{23} + t_{24} \leq 800$
- Departament 3: $t_{34} \leq 100$
- Departament 4: $t_{41} + t_{42} \leq 200$

Departament sursă	Departament destinație				Număr maxim de ore transferabile
	1	2	3	4	
1	-	Da	Da	-	400
2	-	-	Da	Da	800
3	-	-	-	Da	100
4	Da	Da	-	-	200

Repartizarea forței de muncă: model inițial vs. model extins

Model inițial

Fără transferuri între departamente

- Variabile de producție: P_1, P_2 ; numărul de unități fabricate din cele două produse
- Capacitățile departamentelor sunt fixe: 6500, 6000, 7000, 1400
- Modelul LP include:
 - **2 variabile** de decizie
 - **4 constrângeri** de capacitate
 - constrângeri de nenegativitate

Limitare: modelul indică departamentele cu capacitate neutilizată, dar nu arată cum poate fi redistribuită forța de muncă

Model extins

Cu transferuri între departamente

- Variabile de producție: P_1, P_2 ; numărul de unități fabricate din cele două produse
- Variabile pentru capacitatea efectivă: h_1, h_2, h_3, h_4 ; orele disponibile în departamente după transferuri
- Variabile de transfer: $t_{12}, t_{13}, t_{23}, t_{24}, t_{34}, t_{41}, t_{42}$
- Modelul LP include:
 - **13 variabile:** 2 de producție, 4 auxiliare și 7 de transfer
 - **12 constrângeri** principale
 - constrângeri de nenegativitate

Avantaj: modelul poate determina explicit cum trebuie transferate orele de muncă între departamente

Idee-cheie: modelul extins transformă observația managerială „ar fi utilă realocarea forței de muncă” într-o decizie optimă calculabilă prin programare liniară

Repartizarea forței de muncă (cont.)

Planificare productie		Ore de munca					
P1	P2		Folosite		Disponibile	Diferenta	Diferenta
6825.00	1751.00		6099.70	<=	6100.25	0.55	1062.10
			4559.60	<=	5200.00	640.40	1890.30
			8050.70	<=	8050.70	0.00	0.20
			1549.05	<=	1549.05	0.00	0.20
Maximizare profit		420045.00					

Matricea de transfer							
De la/la	1	2	3	4	Total		
1		0.00	399.75		399.75	<=	400.00
2			750.95	49.05	800.00	<=	800.00
3				100.00	100.00	<=	100.00
4	0.00	0.00			0.00	<=	200.00
Total	0.00	0.00	1150.70	149.05			

- Dacă managerul are flexibilitatea de a realoca forța de muncă între departamente, pot rezulta
- **reducerea orelor neutilizate**
 - **utilizarea mai eficientă a forței de muncă**
 - **creșterea profitului**

- Soluția optimă indică fabricarea următoarelor cantități:

- **6825 unități** din primul produs
- **1751 unități** din al doilea produs

- Profitul maxim obținut este de **420,045 lei**

- Cu 52,115 lei mai mult, folosind
 - instruirea încrucișată a personalului
 - transferul forței de muncă

- 399.75 ore sunt transferate din departamentul 1 în departamentul 3
- 750.95 ore: departamentul 2 → departamentul 3
- 49.05 ore: departamentul 2 → departamentul 4
- 100 ore: departamentul 3 → departamentul 4

Acest model LP **determină automat** transferurile de ore de muncă între departamente și identifică alocarea cea mai profitabilă

Probleme de mixare

Problemele de mixare apar când trebuie combinate două sau mai multe resurse pentru a obține produse finale cu specificații impuse

- Resursele conțin componente/ingrediente care trebuie combinate astfel încât produsul final să respecte proporțiile sau specificațiile impuse

Decizia managerului

Managerul trebuie să stabilească ce cantitate din fiecare resursă se cumpără/utilizează, astfel încât cerințele produsului să fie respectate la **cost minim**

Aplicații frecvente

- Industria petrolieră: amestecarea țițeiului pentru obținerea benzinei
- Industria chimică: amestecuri pentru îngrășăminte
- Industria alimentară: ingrediente pentru băuturi, supe și produse alimentare



Probleme de mixare (cont.)

Ex³: Compania petrolieră **Grand Strand** produce două tipuri de benzină: **regular** și **premium**. Benzina este obținută prin amestecarea a trei componente petroliere, disponibile în cantități limitate și cu costuri diferite.

Benzina regular poate fi vândută cu **2,90 \$/galon**, iar benzina premium cu **3,00 \$/galon**.

Pentru perioada curentă de planificare, cantitățile disponibile și costurile celor trei componente sunt prezentate în tabel.

Componenta petrolieră	Cost/galon	Cantitate maximă disponibilă [galoane]
1	\$2.50	5000
2	\$2.60	10,000
3	\$2.84	10,000

Produs	Specificații
Benzină regular	Cel mult 30% componenta 1
	Cel puțin 40% componenta 2
	Cel mult 20% componenta 3
Benzină premium	Cel puțin 25% componenta 1
	Cel mult 45% componenta 2
	Cel puțin 30% componenta 3

1 galon = 3.785 litri

Specificațiile fiecărui tip de benzină impun limite privind ponderea fiecărei componente în produsul final. În plus, compania trebuie să producă cel puțin **10,000 galoane** de benzină regular.

Problema mixului Grand Strand este să se determine câte galoane din fiecare componentă trebuie utilizate pentru fiecare tip de benzină, astfel încât **profitul total să fie maxim**, respectând constrângerile privind disponibilitatea componentelor, specificațiile produselor și cererea minimă de benzină regular.

Probleme de mixare (cont.)

Variable de decizie

x_{ij} – numărul de galoane din componenta petrolieră i utilizate pentru obținerea benzinei de tip j ($i = \overline{1,3}; j \in \{r, p\}$)

- r – benzină regular
- p – benzină premium

x_{1r} – galoane din componenta 1 în benzina regular
 x_{2r} – galoane din componenta 2 în benzina regular
 x_{3r} – galoane din componenta 3 în benzina regular

x_{1p} – galoane din componenta 1 în benzina premium
 x_{2p} – galoane din componenta 2 în benzina premium
 x_{3p} – galoane din componenta 3 în benzina premium

➤ Funcția obiectiv:

Max **Venituri** din vânzarea benzinei – **Costuri** componente petroliere

Venituri din vânzarea benzinei: $2.9(x_{1r} + x_{2r} + x_{3r}) + 3(x_{1p} + x_{2p} + x_{3p})$

Benzina regular: $x_{1r} + x_{2r} + x_{3r}$

Benzina premium: $x_{1p} + x_{2p} + x_{3p}$

Costuri componente petroliere: _____

Componenta 1: $x_{1r} + x_{1p}$

Componenta 2: $x_{2r} + x_{2p}$

Componenta 3: $x_{3r} + x_{3p}$

Benzina regular poate fi vândută cu **2,90 \$/galon**,
iar benzina premium cu **3,00 \$/galon**

Componenta petrolieră	Cost/galon	Cantitate maximă disponibilă [galoane]
1	\$2.50	5000
2	\$2.60	10,000
3	\$2.84	10,000

Probleme de mixare (cont.)

➤ Constrângeri

C1 – C3: disponibilitatea componentelor petroliere

- Componenta 1: $x_{1r} + x_{1p} \leq 5000$
- Componenta 2: $x_{2r} + x_{2p} \leq 10,000$
- Componenta 3: $x_{3r} + x_{3p} \leq 10,000$

C4 – C9: specificații de amestec

- Benzină regular – componenta 1: $x_{1r} \leq 0.3(x_{1r} + x_{2r} + x_{3r})$
- Benzină regular – componenta 2: $x_{2r} \geq 0.4(x_{1r} + x_{2r} + x_{3r})$
- Benzină regular – componenta 3: $x_{3r} \leq 0.2(x_{1r} + x_{2r} + x_{3r})$
- Benzină premium – componenta 1: _____
- Benzină premium – componenta 2: _____
- Benzină premium – componenta 3: _____

C10: minim necesar benzină regular

$$x_{1r} + x_{2r} + x_{3r} \geq 10,000$$

Componenta petrolieră	Cantitate maximă disponibilă [galoane]
1	5000
2	10,000
3	10,000

Produs	Specificații
Benzină regular	Cel mult 30% componenta 1
	Cel puțin 40% componenta 2
	Cel mult 20% componenta 3
Benzină premium	Cel puțin 25% componenta 1
	Cel mult 45% componenta 2
	Cel puțin 30% componenta 3



Probleme de mixare (cont.)

Objective		
Cell	Name	Value
\$C\$16	Max Profit	7100

- Profitul maxim obținut este **7100 \$**
- **Benzina regular**
 - 1250 galoane din componentă 1
 - 6750 galoane din componentă 2
 - 2000 galoane din componentă 3
- **Benzină premium**
 - 3750 galoane din componentă 1
 - 3250 galoane din componentă 2
 - 8000 galoane din componentă 3

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$B\$22	Total Component	5000	\$B\$22<=\$B\$24	Binding	0
\$C\$22	Total	10000	\$C\$22<=\$C\$24	Binding	0
\$D\$22	Total	10000	\$D\$22<=\$D\$24	Binding	0
\$E\$20	Regular Total	10000	\$E\$20>=\$G\$20	Binding	0
\$J\$19	Max Comp 1	1250	\$J\$19<=\$L\$19	Not Binding	1750
\$J\$20	Max Comp 3	2000	\$J\$20<=\$L\$20	Binding	0
\$J\$21	Min Comp 2	6750	\$J\$21>=\$L\$21	Not Binding	2750
\$J\$24	Min Comp 1	3750	\$J\$24>=\$L\$24	Binding	0
\$J\$25	Min Comp 3	8000	\$J\$25>=\$L\$25	Not Binding	3500
\$J\$26	Max Comp 2	3250	\$J\$26<=\$L\$26	Not Binding	2750

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$20	Regular Component	1250	0	0.399999999	0.4	0
\$C\$20	Regular	6750	0	0.3	0	0.640000003
\$D\$20	Regular	2000	0	0.059999998	0.499999999	0
\$B\$21	Premium Component	3750	0	0.5	0	0.4
\$C\$21	Premium	3250	0	0.399999999	0.640000003	0
\$D\$21	Premium	8000	0	0.16	0	0.160000001

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$22	Total Component	5000	0.499999998	5000	2333.333333	1666.666667
\$C\$22	Total	10000	0.399999999	10000	5000	4333.333333
\$D\$22	Total	10000	0.160000001	10000	5000	4230.76923
\$E\$20	Regular Total	10000	-0.1	10000	5909.090909	5000
\$J\$19	Max Comp 1	1250	0	0	1E+30	1750
\$J\$20	Max Comp 3	2000	0	0	2749.999999	2000
\$J\$21	Min Comp 2	6750	0	0	2750	1E+30
\$J\$24	Min Comp 1	3750	0	0	1250	1750
\$J\$25	Min Comp 3	8000	0	0	3500	1E+30
\$J\$26	Max Comp 2	3250	0	0	1E+30	2750

Pentru benzina regular, componenta 1 este utilizată cu **1750 galoane sub limita maximă admisă**

Pentru benzina regular, componenta 2 este folosită cu **2750 galoane peste minimul necesar**

Rezumat



Ce am urmărit?

În cursurile 4 și 5 am analizat aplicații ale programării liniare în sprijinul procesului decizional

Ce tipuri de probleme am modelat?

Am formulat, rezolvat și interpretat probleme din:

- marketing
- finanțe
- managementul operațiunilor

Legătura cu problemele reale

Problemele discutate sunt variante simplificate ale situațiilor reale, care pot implica:

- date incomplete sau dificil de obținut
- numeroase variabile de decizie
- multe constrângeri operaționale

Idee-cheie: modelarea LP oferă un cadru riguros pentru transformarea unei probleme manageriale într-o decizie optimă calculabilă

Rezumat

Managementul operațiunilor

- Decizii de tip *make-or-buy*
- Planificarea producției
- Repartizarea forței de muncă
- Probleme de mixare

→ **Modelarea problemelor de rețea și distribuție (I)**